

Manual de Teoría

Teoría del Daño Concentrado.

En la Universidad de Los Andes se ha desarrollado un método que combina la definición de la variable de daño de los medios continuos con el concepto de rótula plástica, adaptándolos a la teoría de pórticos. Este método permite la simulación, el modelado del comportamiento inelástico y daño en estructuras de concreto armado, y es capaz de hacer el análisis para la evaluación de las mismas.

El modelo se fundamenta en la mecánica de la fractura, la teoría del daño continuo y el modelo de plasticidad concentrada. El mismo describe el comportamiento histerético de un pórtico de concreto armado bajo acciones sísmicas. Por esta razón, se puede simular el orden de aparición de los daños o grietas y de las deformaciones plásticas de la estructura; considerando la pérdida de rigidez, la plasticidad, la influencia de la carga axial en el comportamiento a flexión, secciones asimétricas y el efecto de la fatiga de bajo ciclaje en elementos de concreto armado.

El análisis estructural de un pórtico bajo solicitaciones estáticas o dinámicas, puede verse como un “problema matemático compatiblemente determinado”, siempre y cuando se tenga el mismo número de incógnitas como de ecuaciones, donde los valores desconocidos y los datos se relacionan en ecuaciones mediante conceptos, tales como: cinemática de pórticos planos, cinética de los pórticos planos, pórticos elastoplásticos, la mecánica de la fractura frágil, teoría del daño continuo, plasticidad y fractura, entre otros.

Conceptos de la Mecánica de la Fractura.

La aplicación de solicitaciones produce una degradación progresiva de las propiedades mecánicas de la estructura y del material, lo que conlleva a una pérdida gradual de su resistencia.

En la mecánica de la fractura se supone que el material es elástico, pero se admite la existencia de fisuras macroscópicas que pueden propagarse. La propagación de fisuras conduce a la disminución de la resistencia y de la rigidez de la estructura y eventualmente a su colapso. La propagación de la fisura se describe mediante el criterio de Griffith.

Criterio de Griffith

Según Griffith, la energía total de una placa fisurada puede expresarse de la siguiente manera:

$$E = W - T_{ex} + W_s \quad (1.1)$$

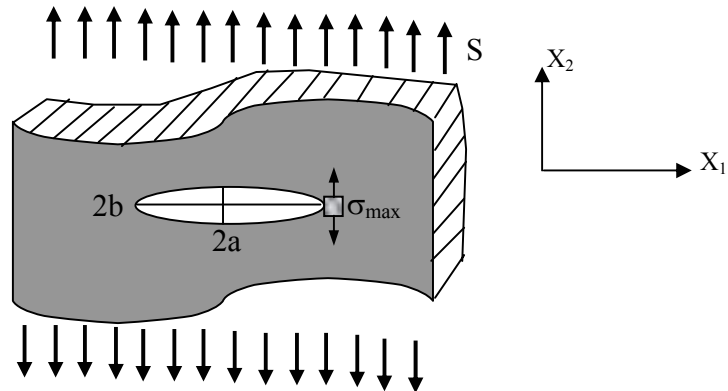


Figura 1.1 Placa con agujero elíptico sometida a tracción uniforme en el infinito.

Donde W es la energía de deformación elástica, T_{ex} es el trabajo de las fuerzas externas y W_s corresponde a una energía superficial asociada a la aparición de nuevas superficies durante la propagación de la fisura. Para el caso particular de una placa infinita con un agujero elíptico (Figura 1.1), de espesor unitario y de un material isótropo, la energía de deformación es igual a:

$$W = W_0 - \frac{\pi S^2 a^2}{E} \quad (1.2)$$

Donde W_0 es la energía elástica de la placa cuando no hay fisura y E el módulo de elasticidad del material.

Según la hipótesis de Griffith, el término W_s es proporcional a la longitud de la fisura y tiene por expresión:

$$W_s = 4\gamma a \quad (1.3)$$

Donde γ es la densidad de energía por unidad de superficie. Supóngase ahora que la placa está sometida a desplazamientos impuestos constantes en el infinito, de tal manera que las reacciones a esos desplazamientos sean iguales a la tracción S . La expresión (1.1) sigue siendo válida en ese caso y, además, el trabajo de las fuerzas externas es nulo. Se tiene entonces:

$$E = -\frac{\pi S^2 a^2}{E} + 4\gamma a + W_0 \quad (1.4)$$

La energía total de la placa puede representarse mediante una parábola cóncava tal y como se muestra en la figura:

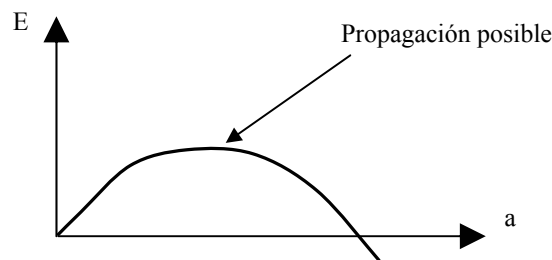


Figura 1.2 Energía total en función de la longitud de la fisura.

Esta figura muestra porqué hay fisura que no se propagan. Supóngase que la longitud de la fisura en la placa tiene un valor inferior al que corresponde al máximo de la curva. Para propagar la fisura, es decir, para desplazar la longitud “a” hacia la derecha en el gráfico de la figura 1.2, es necesario aumentar la energía total de la placa. Sin embargo, la placa está sometida a desplazamientos impuestos constantes. Esto significa que no se le está suministrando energía mecánica adicional. La propagación de la fisura es por lo tanto imposible, independientemente del nivel de esfuerzo en la punta del a fisura, puesto que la energía necesaria para ello no está disponible.

Supóngase ahora que la longitud de la fisura tiene un valor igual o mayor al correspondiente al máximo de la grafica. La propagación de la fisura ocurre en este caso con una disminución en la energía total de la placa. Este remanente de energía se transforma en energía cinética y el proceso de propagación de la fisura es ahora físicamente posible. Este es el criterio de Griffith que se escribe como: $dE/da = 0$.

En el caso general el criterio de Griffith puede expresarse de la manera siguiente:

$$G = R \quad (1.5)$$

Donde:

$$G = -\frac{d}{da}(W - T_{ext}); \quad R = \frac{dW_s}{da} \quad (1.6)$$

La variable G es denominada “tasa de disipación de energía” o “fuerza conductora de la grieta”. Puede observarse que G depende de la geometría, de las propiedades de la estructura y de sus solicitaciones. En otras palabras G es el resultado de un análisis estructural. El término R es llamado “Resistencia al agrietamiento” y se admite que es una propiedad del material, de la misma manera que el modulo de elasticidad E o el esfuerzo de fluencia σ_y lo son.

La tasa de disipación de energía es el resultado de un análisis estructural, casi siempre numérico. Una de las maneras posibles de determinar la tasa de disipación de energía consiste en determinar la relación entre la rigidez y la flexibilidad global de la estructura y

la longitud de la fisura. La tasa de disipación de energía se puede calcular entonces mediante la siguiente ecuación.

$$\frac{dF}{da} \cong \frac{F(a + \Delta a) - F(a)}{\Delta a} \quad (1.7)$$

Donde Δa representa un incremento en la longitud de la fisura suficientemente pequeño. Los términos $F(a)$ y $F(a + \Delta a)$ se calculan mediante la relación $F = u/P$, donde el desplazamiento u se determina numéricamente mediante el método de elementos finitos o elementos de contornos.

La resistencia al agrietamiento R es una propiedad del material que debe ser determinada experimentalmente. No obstante, se ha encontrado que en numerosos casos R no es constante sino que depende del incremento en la longitud de la fisura. En otras palabras, al alcanzarse la resistencia al agrietamiento se produce una propagación de la fisura que avanza una cierta distancia y se detiene. Para continuar la propagación es necesario aumentar la fuerza y del valor de la tasa de disipación de energía. Se produce de nuevo un incremento estable en la longitud de la fisura y así sucesivamente. Midiendo estos valores es posible determinar la curva $R = R(\Delta a)$.

TEORIA DEL DAÑO CONTINUO

Con la propagación de una fisura se genera una zona de alta densidad de micro defectos y/o deformaciones plásticas, sin embargo para que los conceptos de la mecánica de la fractura sean válidos, es necesario que la zona de micro agrietamiento sea muy pequeña con respecto al tamaño de la estructura. Si por el contrario la zona de micro defectos es significativamente grande, la mecánica de la fractura frágil deja de ser válida y se hace necesario modelar el comportamiento del material durante la creación de la zona micro agrietada.

Variable de daño continuo

Para caracterizar la densidad de micro defectos en el material, se introducirá una nueva variable interna, denominada daño, que se define a continuación:

Sea “ A ” el área de la cara de un elemento de volumen representativo del material. Esta cara esta orientada según la normal \vec{n} . Sea A_d el área de micro defectos en la misma cara. El daño de esa cara ω_n en el elemento de volumen representativo es:

$$\omega_n = \frac{A_d}{A} \quad (1.8)$$

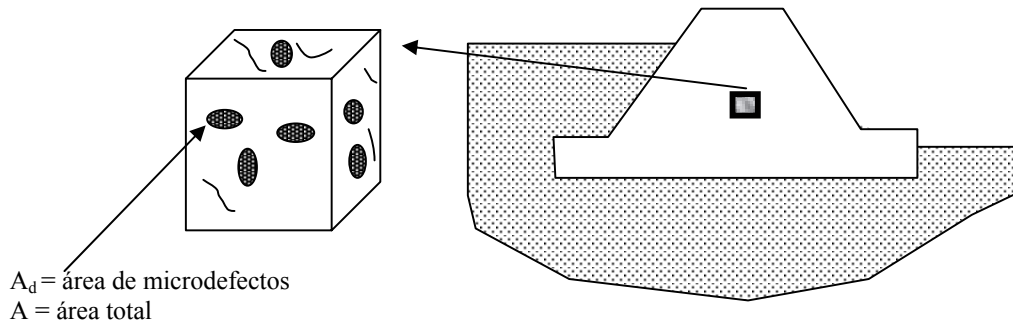


Figura 1.3 Daño en medio continuo

Puede constatar que ω_n puede tomar valores en el intervalo $[0,1]$. El valor de cero corresponde a un elemento de volumen que no tiene microdefectos según la normal \vec{n} . El valor de uno representa un elemento de volumen partido en dos pedazos según el plano normal \vec{n} . En términos generales, el campo $\omega_n(\vec{x})$ representa la densidad relativa de microdefectos en planos perpendiculares al vector normal \vec{n} .

$$\omega_n \cong \omega \quad \forall \vec{n} \quad (1.9)$$

El daño en un elemento de volumen representativo del material puede entonces ser representado mediante la variable escalar ω . De esta manera, se tiene que las zonas deterioradas indicadas en la figura 1.3 puede ser caracterizada como el conjunto de puntos donde la variable de daño continuo es diferente de cero. Ello sugiere un enfoque alternativo al problema de propagación de fisura. Una fisura podría definirse como el conjunto de puntos en los cuales el daño toma el valor de uno. De esta manera no sería necesario emplear los conceptos de la mecánica de la fractura a nivel microscópico para predecir la propagación de la fisura. También pueden seguirse usando estos conceptos y utilizar la teoría del daño continuo únicamente para modelar el comportamiento del material en la zona micro agrietada, o para predecir la iniciación de las fisuras en partes de la estructura donde estas no existen previamente.

Ley de estado y ley de evolución de la deformación plástica

La densidad de microdefectos tiene una influencia importante en el comportamiento elástico o elastoplástico del material. La introducción de la variable de daño en la ley de estado de un material elastoplástico, se realiza mediante el uso de dos conceptos: El esfuerzo efectivo y la hipótesis de equivalencia en deformación.

Considérese una barra microagrietada, como se muestra en la figura 1.4, el esfuerzo de Cauchy en la barra es igual a la relación entre la fuerza aplicada sobre el área resistente: $\sigma = P/A$. El esfuerzo efectivo se define como la fuerza aplicada sobre el área resistente efectiva: $\bar{\sigma} = P/(A - A_d)$. El área efectiva se define como el área total A menos el área de microdefectos A_d . Una expresión que relaciona el esfuerzo efectivo con el esfuerzo de Cauchy y la variable de daño puede ser obtenida tomando en cuenta la definición de esta última:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (1.10)$$

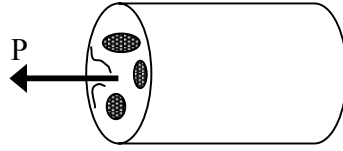


Figura 1.4 Esfuerzo efectivo

La hipótesis de equivalencia en deformaciones establece que el comportamiento de un material dañado puede ser expresado mediante las mismas ecuaciones que el correspondiente al material intacto, si se sustituye el esfuerzo de Cauchy por el esfuerzo efectivo. Así, la ley de estado del material elastoplástico dañado puede ser obtenida a partir de la expresión:

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon_p); \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \sigma = (1 - \omega)E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (1.11)$$

La función de fluencia de un material dañado también puede obtenerse siguiendo el mismo procedimiento. Por ejemplo si se considera un material que inicialmente es perfectamente plástico, se tiene:

$$f(\sigma, \omega) = |\bar{\sigma}| - \sigma_y = \left| \frac{\sigma}{1 - \omega} \right| - \sigma_y \leq 0 \quad (1.12)$$

La función de fluencia de los modelos con endurecimiento cinemática lineal o no se derivan de manera similar.

La ley de evolución de las deformaciones plásticas se representa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} d\varepsilon_p = 0 & \text{si} & f(\sigma, \omega) < 0 & \text{o} & df(\sigma, \omega) < 0 \\ d\varepsilon_p \neq 0 & \text{si} & f(\sigma, \omega) = 0 & \text{y} & df(\sigma, \omega) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Daño Unilateral

En los modelos de daño descritos anteriormente, el daño en compresión y el daño en tracción se acumulan en una misma variable. Así la pérdida de rigidez o de resistencia ocasionadas en, por ejemplo, tracción afecta de la misma manera en tracción y en compresión. Sin embargo, se ha observado experimentalmente que, al menos en materiales frágiles, esto no es así. Es probable que ello sea consecuencia del fenómeno de cierre de fisuras.

Tal y como se ilustra en la figura 1.5, la orientación de las fisuras de tracción y de compresión no es en general la misma. Las fisuras creadas en algunos de los casos, por ejemplo las de tracción, tienden a cerrarse al cambiar el signo del esfuerzo. Se admite que el daño asociado a las microgrietas de tracción o de compresión no tienen influencia en el comportamiento del material mientras éstas estén cerradas.

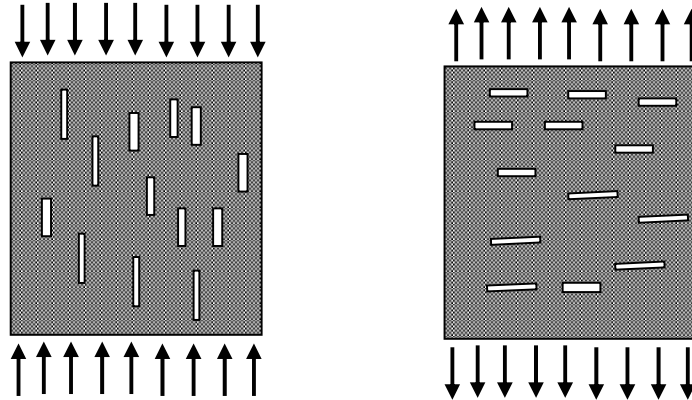


Figura 1.5 Representación de: a) daño en compresión b) daño en tracción

Para modelar matemáticamente este efecto, se introducirán dos variables de daño denominadas ω^+ y ω^- . La primera representa el daño en tracción y la última, al daño en compresión. Cuando se usan ambas variables para caracterizar el deterioro del material se dice que el daño es “unilateral”. El esfuerzo efectivo en el material para el caso de daño unilateral puede definirse de la siguiente manera:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \frac{\sigma}{1 - \omega^+} & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0 \\ \frac{\sigma}{1 - \omega^-} & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

El uso de la hipótesis de equivalencia en deformación con la nueva definición del esfuerzo efectivo permite obtener la ley de estado en el caso de daño unilateral:

$$\varepsilon - \varepsilon_p = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\langle \sigma \rangle}{(1 - \omega^+)E} - \frac{\langle -\sigma \rangle}{(1 - \omega^-)E} \quad (1.15)$$

Donde $\langle x \rangle$ representa de nuevo a la parte positiva de x . Puede constatar que la única diferencia entre la ley de estado (1.11) y la expresión (1.15) es que en esta última, el modulo de elasticidad efectivo depende de ω^+ y ω^- según el signo del esfuerzo.

Para hallar las tasas de disipación de energía asociada a las dos variables de daño, es preferible utilizar la energía de deformación complementaria W^* que, en este caso coincide con la energía de deformación pero se expresa en función del esfuerzo y el daño. Para daño frágil con ε_p igual a cero, la expresión de la energía complementaria es:

$$W^*(\sigma, \omega^+, \omega^-) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \langle \sigma \rangle}{(1 - \omega^+) E} - \frac{\sigma \langle -\sigma \rangle}{(1 - \omega^-) E} \right) \quad (1.16)$$

Las dos tasas de disipación de energía, obtenidas a partir de (1.16) son:

$$G^+ = \frac{\partial W^*}{\partial \omega^+} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \langle \sigma \rangle}{(1 - \omega^+)^2 E} \quad G^- = \frac{\partial W^*}{\partial \omega^-} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \langle -\sigma \rangle}{(1 - \omega^-)^2 E} \quad (1.17)$$

La evolución del daño unilateral puede describirse utilizando el criterio de Griffith dos veces, una para cada variable de daño, y empleando dos funciones de resistencia al agrietamiento diferentes. De esta manera puede obtenerse la envolvente parabólica en el caso del comportamiento en compresión y una envolvente bilineal para representar el comportamiento en tracción tal y como se muestra en la figura 1.6. La envolvente bilineal puede obtenerse usando, por ejemplo, la función de resistencia al agrietamiento $R = A/(B - C\omega)^2$ Donde A, B Y C son constantes que dependen de la pendiente de la segunda rama de la curva en tracción, modulo de elasticidad E y de la resistencia en tracción del material.

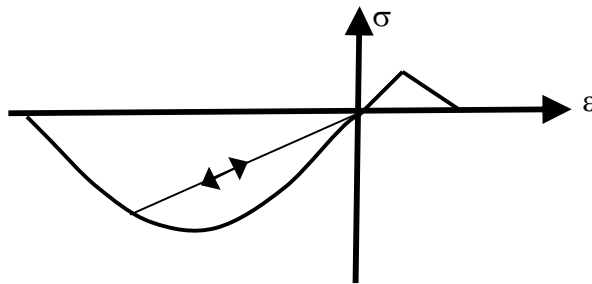


Figura 1.6 Comportamiento del Concreto empleando un modelo de daño unilateral.

El comportamiento elastoplástico de un material unilateral puede describirse a partir de la función de fluencia obtenida con la hipótesis de equivalencia en deformaciones y la definición de esfuerzo efectivo (1.14).

CINEMÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS

En el movimiento de los pórticos planos analizado y modelado desde el punto de vista de la cinemática (estudio del movimiento sin considerar las causas que lo generan) se introducen los conceptos: *desplazamiento* y *deformación*, y las relaciones existentes entre ellos. El desplazamiento permite definir el movimiento de la estructura, mientras que la deformación representa el cambio de forma.

Desplazamientos generalizados del nodo “i”.

Se representan mediante una matriz columna $\{u\}_i^t = (u_1, u_2, u_3)$, donde u_1 es el desplazamiento horizontal del nodo “i”, u_2 es el desplazamiento vertical del mismo nodo y u_3 es la rotación del nodo “i” con respecto a el eje perpendicular al plano que contenga el pórtico, ver figura 1.7.

Los desplazamientos de cualquier miembro plano “m” se define por la matriz columna $\{q\}_b^t = (\{u_1\}^t \{u_2\}^t \dots \{u_n\}^t)$. Los desplazamientos generalizados de todos los nodos de la estructura se agrupan en una matriz columna $\{U\}^t = (\{u\}_i^t, \{u\}_j^t, \dots, \{u\}_n^t)$.

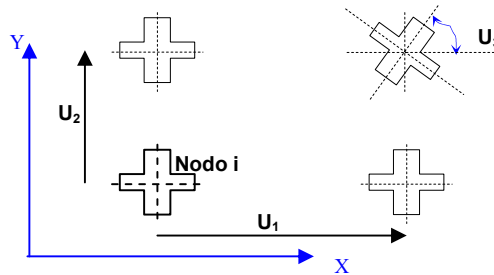


Figura 1.7 Desplazamientos generalizados del nodo i.

Es importante considerar que la estabilidad de un sistema estructural aporticado se consigue limitando algunos desplazamientos, es decir, sus valores durante el movimiento de la estructura son conocidos e impuestos por el analista.

El conjunto de desplazamientos limitados de la estructura se agrupan en un conjunto N_u denominado los apoyos del pórtico expresados como: $U_k = U_k^d(t)$ para $K \in N_u$. El termino $U_k^d(t)$ son funciones conocidas en el tiempo y en la mayoría de los casos son nulas. También, puede definirse las velocidades o aceleraciones en los apoyos más las condiciones iniciales en el instante $t = 0$ permitiendo establecer la historia de las sollicitaciones y analizar problemas de naturaleza sísmica.

Deformaciones generalizadas.

Considerando un miembro “m” de un pórtico plano en el caso de pequeñas deformaciones se denomina deformaciones generalizadas a la matriz columna $\{\phi\}^t = \{\phi_i, \phi_j, \delta\}$, en la cual se representan los cambios de forma de los miembros estructurales. Los valores ϕ_i y ϕ_j corresponden a las rotaciones de la tangente en los extremos i y j respecto a la cuerda “i-j” del miembro respectivamente y δ indica el alargamiento de la cuerda “i-j” del miembro respecto a la configuración inicial. La representación física y convenio de signo de las deformaciones generalizadas se indican en la figura 1.8.

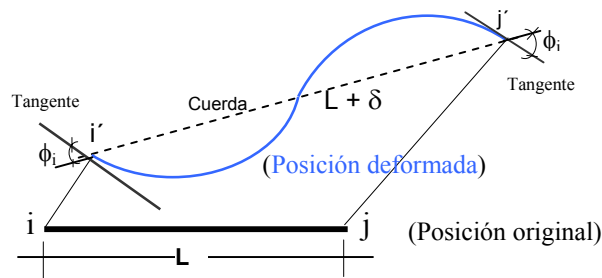


Figura 1.8 Deformaciones Generalizadas

Ecuaciones de cinemática.

Las ecuaciones de cinemática establecen las relaciones entre los desplazamientos generalizados y las deformaciones generalizadas. Las ecuaciones de cinemática o de compatibilidad se consiguen mediante relaciones geométricas al estudiar los movimientos producidos por incrementos infinitesimales “dq” en cada extremo del elemento, en las direcciones de los grados de libertad del miembro y asumiendo que actúan de manera independiente, es decir, uno a la vez mientras los demás son nulos. Ver figura 1.9.

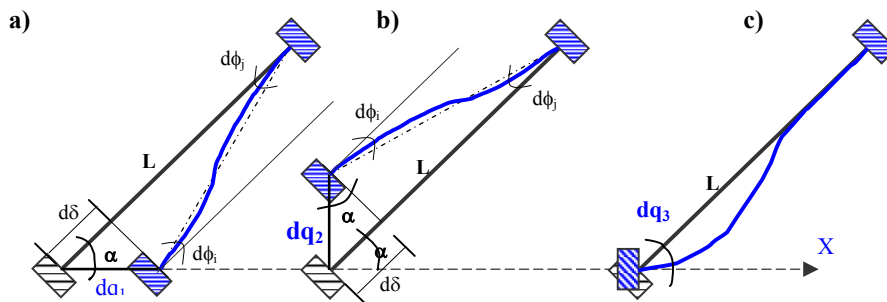


Figura 1.9 Deformaciones generalizadas en el miembro “ij” producidas por los movimientos infinitesimales dq1, dq2, dq3 en el nodo i.

Al imponer un desplazamiento infinitesimal en la dirección horizontal como se observa en la figura 1.9.a, con la condición de que los demás posibles desplazamientos permanezcan nulos, se obtienen los siguientes incrementos en las deformaciones generalizadas:

$$d\phi_i = dq_1 \frac{\text{sen}\alpha}{L}; \quad d\phi_j = dq_1 \frac{\text{sen}\alpha}{L}; \quad d\delta = -dq_1 \cos\alpha \quad (1.18)$$

Donde α es el ángulo de inclinación entre la cuerda i-j y el eje horizontal “X” en la configuración (no necesariamente es la inicial) y L es la longitud de la cuerda i-j en ese instante.

Realizando un análisis similar para el resto de los desplazamientos infinitesimales el extremo “i” que se representan en las figuras 1.9.b y 1.9.c, se demuestra las siguientes ecuaciones:

$$d\phi_i = -dq_2 \frac{\cos\alpha}{L}; \quad d\phi_j = -dq_2 \frac{\cos\alpha}{L}; \quad d\delta = -dq_2 \operatorname{sen}\alpha; \quad (1.19)$$

$$d\phi_i = dq_3; \quad d\phi_j = 0.; \quad d\delta = 0. \quad (1.20)$$

Similarmente se obtienen incrementos en las deformaciones generalizadas debido a los desplazamientos infinitesimales dq_4 , dq_5 y dq_6 del extremo “j”.

Para el caso donde se producen pequeños desplazamientos, simultáneamente en todos los grados de libertad del miembro, se obtiene la siguiente expresión lineal de cinemática:

$$\{d\phi\}_{3 \times 1} = [Bo]_{3 \times 6} \{dq\}_{6 \times 1} \quad (1.21)$$

Donde: $[Bo]_{3 \times 6}$ es la matriz de transformación local.

$$[Bo]_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} & -\frac{\cos\alpha}{L} & 1 & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} & \frac{\cos\alpha}{L} & 0 \\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} & -\frac{\cos\alpha}{L} & 0 & -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} & \frac{\cos\alpha}{L} & 1 \\ -\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Para el caso general en el que α y L dependen de los desplazamientos ($\alpha(q)$, $L(q)$ indica la no linealidad geométrica debido a grandes desplazamientos), se obtiene una expresión no lineal para la matriz de transformación. Es posible escribir una ecuación de compatibilidad no lineal para el caso general, la cual requiere ser integrada debido a que un miembro pasa por un infinito número de configuraciones intermedias desde la configuración inicial hasta la configuración final. La ecuación de cinemática se obtiene integrando la siguiente ecuación:

$$\{\phi\} = \int_{(0)}^{(q)} [B_1(q)] \{dq\} \quad (1.23)$$

Para obtener una formulación alternativa del conjunto de expresiones dadas en la ecuación (1.23), se considera directamente la transformación experimentada por el miembro desde la configuración inicial hasta una configuración deformada cualquiera como se observa en la figura 1.10; posteriormente usando consideraciones geométricas se consiguen las relaciones de cinemática indicadas en las ecuaciones (1.24).

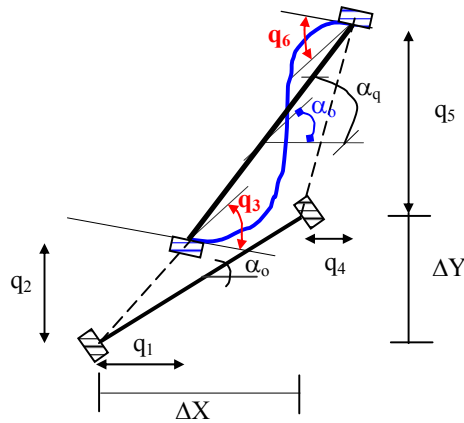


Figura 1.10 Configuración de un elemento en el caso de grandes desplazamientos.

$$\phi_i = q_3 - (\alpha_o - \alpha_q) \quad \text{donde: } \alpha_q = \arctan\left(\frac{\Delta Y + q_5 - q_2}{\Delta X + q_4 - q_1}\right)$$

$$\phi_j = q_6 - (\alpha_o - \alpha_q) \quad \text{y } L_{(q)} = \sqrt{((\Delta Y + q_5 - q_2)^2 + (\Delta X + q_4 - q_1)^2)} \quad (1.24)$$

$$\delta = L_{(q)} - L_o$$

CINÉTICA DE PÓRTICOS PLANOS

Desde el punto de vista de la cinética (estudio del movimiento considerando las fuerzas y momentos que lo originan) se establece el equilibrio dinámico de la estructura mediante el principio de los trabajos virtuales estableciendo la relación entre los esfuerzos generalizados, fuerzas externas y fuerzas de inercia.

Esfuerzos generalizados.

Los esfuerzos generalizados del miembro se denotan por: $\{M\}^t = \{m_i, m_j, n\}$, donde m_i y m_j son los momentos flectores en los extremos i y j del miembro, respectivamente y n es la fuerza axial (ver figura 1.11).



Figura 1.11 Esfuerzos generalizados en un miembro de un pórtico

Fuerzas internas generalizadas.

Las fuerzas internas generalizadas que actúan sobre el miembro en la configuración deformada, se agrupan en la matriz columna $\{Q\}^t = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}^t$ según se muestra en la figura 1.12. Los subíndices corresponden a los desplazamientos posibles de los nodos en los extremos del miembro.

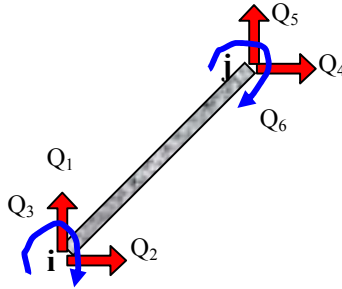


Figura 1.12 Fuerzas generalizadas en un miembro de un pórtico plano.

Fuerzas externas sobre los nodos del pórtico.

Las fuerzas externas serán definidas por medio de la matriz columna $\{P\}^t = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_{3n-2}, P_{3n-1}, P_{3n}\}^t$, donde:

Los valores $P_1, P_4, \dots, P_{3n-2}$ definen las fuerzas en la dirección del eje X aplicadas en las juntas 1, 2, 3, ..., n respectivamente. Los términos $P_2, P_5, \dots, P_{3n-1}$ representan las fuerzas en la dirección del eje Y aplicadas en las juntas 1, 2, 3, ..., n respectivamente. Los valores P_3, P_6, \dots, P_{3n} definen los momentos respecto a un eje perpendicular al plano donde esta contenida la estructura, aplicados en las juntas 1, 2, 3, ..., n respectivamente.

Al conjunto de fuerzas externas asociadas a los grados de libertad restringidos en la estructura (desplazamientos limitados, conjunto N_u) se les denomina reacciones y son desconocidas por tanto constituyen una incógnita del problema.

En la matriz $\{P\}^t$ se incluyen las fuerzas actuantes aplicadas y las reacciones en los nodos con desplazamientos restringidos (apoyos de la estructura), ver figura 1.1

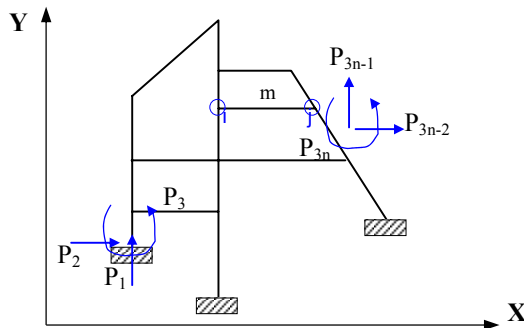


Figura 1.13 Sistema apórticado plano con fuerzas externas.

Fuerzas de Inercia.

Las fuerzas de inercia de un miembro de un pórtico se representan por medio de la matriz:

$$\{I\}^t = \{I_1, \dots, I_6\} = ([m]\{\ddot{q}\}) \quad (1.25)$$

El término $[m]$ corresponde a la matriz de masas del elemento y $\{\ddot{q}\} = \frac{d^2q}{dt^2}$ corresponde a la matriz de aceleraciones generalizadas del mismo. La matriz de masa es un dato del problema y su determinación puede hacerse en base a los conceptos de la dinámica estructural.

Alternativamente, pueden emplearse el vector de fuerzas de inercia $\{I_g\}_b$ y de masa $[m_g]_b$ de la barra b referida a los desplazamientos del pórtico. En ese caso, las fuerzas de inercia son:

$$\{I_g\}_b^t = \{I_1, \dots, I_{3n}\} = ([m_g]\{\ddot{U}\}) \quad (1.26)$$

Donde $\{\ddot{U}\}$ es la aceleración del pórtico.

La matriz de fuerzas inerciales $\{I\}_{\text{pórtico}}$ del pórtico se obtiene sumando las fuerzas inerciales de los todos miembros,

$$\{I\}_{\text{pórtico}} = \sum_{b=1}^m \{I_g\}_b = \sum_{b=1}^m ([m_g]\{\ddot{U}\}) = [masa]\{\ddot{U}\} \quad (1.27)$$

Donde: m el número de elementos que conforman el pórtico y $[masa] = \sum_{b=1}^m [m_g]$ es la matriz de masas del pórtico.

Ecuaciones de equilibrio dinámico.

El principio de los trabajos virtuales establece que si a un pórtico plano constituido por n nodos y m elementos se somete a un desplazamiento virtual $\{U^*\}$, el trabajo virtual de las fuerzas externas debe ser igual a la suma del trabajo virtual de las fuerzas internas y de las fuerzas de inercia. Lo anterior se puede establecer mediante la siguiente expresión [2]:

$$T_i^* + T_a^* = T_e^* \quad \text{para todo } \{U^*\} \quad (1.28)$$

Si la expresión anterior se verifica, se dice que la estructura está en equilibrio dinámico. El trabajo virtual de las fuerzas internas en términos generales se define como el producto de

los esfuerzos por las deformaciones generalizadas. A tal efecto se tiene para toda la estructura que:

$$T_i^* = \sum_{b=1}^m \{\phi^*\}_b^t \{M\}_b \quad (1.29)$$

El trabajo virtual de las fuerzas externas para toda la estructura, se formula como:

$$T_e^* = \{U^*\}^t \{P\} \quad (1.30)$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas de inercia según el desplazamiento virtual $\{U^*\}$ se calcula como:

$$T_a^* = \{U^*\}^t \{I\} \quad (1.31)$$

Sustituyendo las expresiones (1.29), (1.30) y (1.31) en la ecuación de trabajo (1.28) se obtiene:

$$\sum_{b=1}^m \{\phi^*\}_b^t \{M\}_b + \{U^*\}^t \{I\} = \{U^*\}^t \{P\} \rightarrow \text{para todo } \{U^*\} \quad (1.32)$$

Donde $\{\phi^*\}$ son las deformaciones producidas por los desplazamientos infinitesimales virtuales $\{U^*\}$. Usando ecuaciones de compatibilidad y la expresión (1.27) la expresión (1.32) se puede escribir:

$$\{U^*\}^t \sum_{b=1}^m [B]_b^t \{M\}_b + \{U^*\}^t [m] \{\ddot{U}\} = \{U^*\}^t \{P\} \rightarrow \text{para todo } \{U^*\} \quad (1.33)$$

Teniendo en cuenta que la expresión (1.33) se debe cumplir para cualquier desplazamiento virtual $\{U^*\}$, se consigue la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$\sum_{b=1}^m [B]_b^t \{M\}_b + [m] \{\ddot{U}\} = \{P\} \quad (1.34)$$

En el caso de análisis estático la ecuación de equilibrio se reduce ya que el segundo término de la ecuación (1.34) se elimina debido a que no existen aceleraciones en los nodos. De esta manera se consigue la expresión del equilibrio estático en los nodos:

$$\sum_{b=1}^m [B]_b^T \{M\}_b = \{P\} \quad \text{o} \quad \sum_{b=1}^m \{Q(q)\} = \{P\} \quad (1.35)$$

El término $\{Q(q)\} = [B(q)]_b^T \{M\}$ representa el equilibrio de un miembro; el cual será utilizado para resolver el problema local en la implementación numérica del problema, como se vera en el capítulo 3.

PORTICOS ELÁSTICOS LINEALES O NO LINEALES

Las ecuaciones de cinemática y de cinética definidas anteriormente, no son suficientes para realizar el análisis de una estructura, ya que en ninguna de ellas se ha tomado en cuenta el material del cual están constituidos los miembros del pórtico. Para definir completamente el problema se incluirá en el sistema una nueva ecuación matricial para cada miembro del pórtico plano, en la que se definirán relaciones entre los esfuerzos generalizados $\{M\}$ con las deformaciones generalizadas $\{\phi\}$. Estas relaciones se llamarán “Ley de comportamiento”, en las cuales se toma en cuenta al material del pórtico, de manera que, para dos pórticos de geometrías semejantes pero diferentes materiales (concreto y acero por ejemplo) las ecuaciones de compatibilidad y las de equilibrio son totalmente iguales y sólo las leyes de comportamiento diferencian ambos casos.

Ley de comportamiento elástica lineal.

La ley de comportamiento del elemento viga- columna elástico lineal se obtiene realizando un análisis del miembro tomando como base la teoría clásica de vigas de la resistencia de materiales o vigas de Euler-Bernoulli (no se considera las flechas debidas a las fuerzas cortantes). Mediante esta teoría se relacionan las flechas, las fuerzas externas distribuidas, las fuerzas axiales y los desplazamientos axiales; Flórez [2] demuestra dichas relaciones obteniendo finalmente que la ley de comportamiento elástico lineal del elemento viga- columna para cargas distribuidas nulas, se define como:

$$\{M\} = [S]\{\phi\} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad (1.36 \text{ a})$$

$$\{\phi\} = [F]\{M\} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & 0 \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_i \\ m_j \\ n \end{Bmatrix} \quad (1.36 \text{ b})$$

Donde: [S] es la matriz de rigidez del miembro y [F] es la matriz de flexibilidad del miembro.

En el caso general donde las cargas distribuidas sobre el miembro no sean nulas, es necesario añadir a la expresión (1.36 a) un término adicional debido a que las condiciones de borde son diferentes del caso anterior. El término adicional define los esfuerzos generalizados iniciales, representado por $\{M^0\}$ y solo depende de la carga externa aplicada al miembro. En consecuencia, la ley de comportamiento elástico \ lineal de un elemento viga-columna para cargas externas diferentes de cero, se define como:

$$\{M\} = [S]\{\phi\} + \{M^0\} \quad (1.37)$$

PORTICOS ELASTOPLÁSTICOS.

El modelo elástico no considera la posibilidad de que bajo sollicitaciones externas se produzcan deformaciones generalizadas permanentes, es decir, deformaciones remanentes bajo cargas nulas. No obstante, la evidencia experimental muestra que cuando una estructura se somete a cargas externas que sobrepasen cierto límite, se presentan deformaciones permanentes, que pueden ser muy significativas. La ley de comportamiento que toma en cuenta este fenómeno son denominados modelos plásticos o elastoplásticos basados en el concepto de rótula plástica.

Ley de comportamiento elastoplástica para miembros de un pórtico plano.

Partiendo de la hipótesis de plasticidad concentrada, la cual supone que un miembro de un pórtico está compuesto por una viga-columna elástica (lineal o no) y dos rótulas plásticas en los extremos, (ver figura 1.14) se introduce una nueva variable interna, el vector de deformaciones plásticas generalizadas: $\{\phi\}^t = \{\phi_i^p, \phi_j^p, 0.\}^t$.

Donde: ϕ_i^p define la rotación plástica en la rótula i, y ϕ_j^p define la rotación plástica en la rótula j, ambas medidas con respecto a la cuerda deformada.

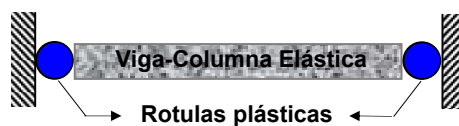


Figura 1.14 Modelo de plasticidad concentrada.

Las deformaciones totales del miembro $\{\phi\}$, se descomponen en las deformaciones de la viga-columna $\{\phi^{vc}\}$ más las deformaciones de las rótulas plásticas $\{\phi^p\}$.

$$\{\phi\} = \{\phi^{vc}\} + \{\phi^p\} \quad (1.38)$$

La ley de comportamiento es el conjunto de expresiones que permiten calcular los esfuerzos conocida la historia de deformaciones. Al sustituir la expresión (1.38) en la expresión (1.36a), su resultado no puede ser considerado como la ley de comportamiento, puesto que el vector de deformación plástica $\{\phi^p\}$ no es conocido a priori y depende también de la historia de las deformaciones. Es por ello que la ley de comportamiento se definirá por medio de la ley de estado (1.39) y las leyes de evolución de las nuevas variables internas, $\{\phi^p\}$.

La ley de estado (relación entre los esfuerzos generalizados, deformaciones generalizadas y las variables internas) para un miembro elastoplástico, se escribe como:

$$\{M\} = [S]\{\phi - \phi^p\} + \{M^o\} \quad (1.39)$$

Donde: $\{M^o\}$ es el vector de los esfuerzos generalizados iniciales. $[S]$ es la matriz de rigidez de la viga columna elástica.

Para definir por completo la ley de comportamiento es necesario definir una nueva relación que permita calcular las nuevas incógnitas, $\{\phi^p\}$. Estas relaciones se obtienen a través de las leyes de evolución y funciones de fluencia o criterio de plasticidad. En cada rótula plástica existe una función de fluencia; estas en el caso de rótulas plásticas perfectas son:

$$\begin{aligned} f_i(m_i) &= |m_i| - m_y \leq 0. \\ f_j(m_j) &= |m_j| - m_y \leq 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Donde: f_i y f_j son las funciones de fluencia de las rótulas i y j respectivamente, y m_y es el momento de fluencia de la sección transversal del miembro.

La ley de evolución de las deformaciones plásticas generalizadas del miembro está constituida por:

$$\begin{cases} d\phi_i^p = 0 & \text{si } f_{i(m_i)} < 0 \text{ ó } df_{i(m_i)} < 0 & \text{Plasticidad inactiva} \\ d\phi_i^p \neq 0 & \text{si } f_{i(m_i)} = 0 \text{ ó } df_{i(m_i)} = 0 & \text{Plasticidad activa} \end{cases} \quad (1.41.a)$$

$$\begin{cases} d\phi_j^p = 0 & \text{si } f_{j(m_j)} < 0 \text{ ó } df_{j(m_j)} < 0 & \text{Plasticidad inactiva} \\ d\phi_j^p \neq 0 & \text{si } f_{j(m_j)} = 0 \text{ ó } df_{j(m_j)} = 0 & \text{Plasticidad activa} \end{cases} \quad (1.41.b)$$

La ley de estado (1.39), y las leyes de evolución (1.41) constituyen la ley de comportamiento generalizada del modelo elastoplástico perfecto para un miembro de un pórtico plano. Las ecuaciones cinemáticas (1.23), las ecuaciones de equilibrio (1.35) y las ecuaciones de comportamiento del miembro (1.39) y (1.41) permiten definir el comportamiento de pórticos elastoplásticos.

Pórticos elastoplásticos con endurecimiento.

El comportamiento de la rótula no tiene que ser perfectamente plástico, es posible introducir términos dentro de la función de fluencia que tomen en cuenta el endurecimiento por deformación, como se manifiesta en los ensayos experimentales.

El endurecimiento puede ser incorporado por el desplazamiento del dominio elástico sin aumento de su tamaño, el cual se denomina *endurecimiento cinemático*, como se muestra en la figura 1.15a. Por definición el dominio elástico es el rango de valores de los esfuerzos generalizados a flexión donde se cumplen las funciones de fluencia.

También el endurecimiento puede ser representado por un aumento del tamaño del dominio elástico sin desplazamiento de su centro, denominado *endurecimiento isótropo*, indicado en la figura 1.15.b.

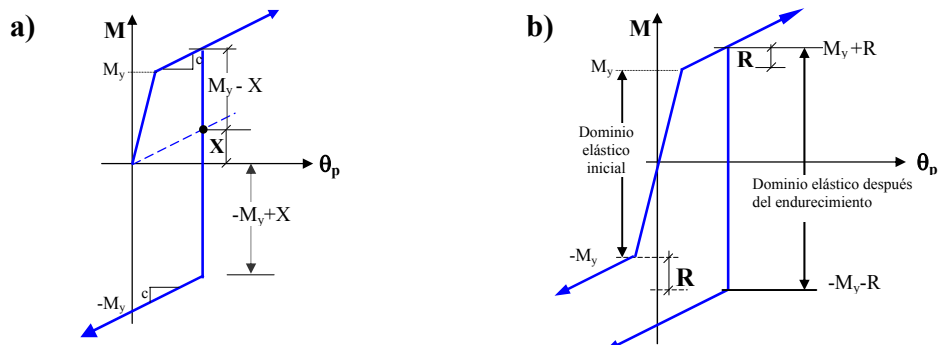


Figura 1.15 Representación de los dos tipos de endurecimiento: **a)** Endurecimiento cinemático lineal. **b)** Endurecimiento Isótropo.

Considerando ambos efectos de endurecimiento, cinemático e isótropo, la función de fluencia aplicada a cada rótula puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} gf_i &= |m_i - X_i| - (m_y + R_i) \\ f_j &= |m_j - X_j| - (m_y + R_j) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Las variables “X” corresponden a la posición del centro del dominio elástico en el espacio de momentos flectores. La ley de evolución de cada variables “X” considerando un endurecimiento lineal se definen como: $X = c\phi^p$. Donde: c representa a una constante que es función del material.

El valor de “R” en las ecuaciones (1.42) representa el efecto de endurecimiento isótropo.

El análisis de pórticos elastoplásticos se puede resolver de dos formas. La primera, sería, un análisis estructural que puede ser transformado en una serie de problemas elásticos con articulaciones internas. Este procedimiento es aplicable sólo si el problema planteado es geoméricamente lineal, estático y con rótulas perfectas. Cada uno de los problemas elásticos corresponde a un incremento de carga y las rotulas plásticas que aparecen en la estructura son representadas por medio de articulaciones internas. Esto es posible ya que durante un incremento de carga, el incremento de momento en la rótula plástica es nulo. Cuando se introduce alguno de los términos no lineales o dinámicos en el problema o cuando las rótulas presentan endurecimiento, se empleará otra manera para resolver el análisis estructural. En la cual es necesario emplear un procedimiento paso a paso y discretizar las aceleraciones nodales usando algún algoritmo de integración numérica, como por ejemplo el método de Newton. También es necesario resolver un sistema de ecuaciones compuesto por la ley de estado, las leyes de evolución de las rotaciones plásticas y las funciones de fluencia. El método comúnmente utilizado para resolver este sistema de ecuaciones se llama algoritmo *predictor-corrector*.

En los pórticos elastoplásticos no se tiene un límite en la deformación, ni se considera pérdida de rigidez, es decir hay ductilidad infinita y no existe cambio de rigidez. En el modelo que se presenta más adelante se tomaran en cuenta estos efectos.

PORTICOS ELASTOPLÁSTICOS ACOPLADOS AL DAÑO.

Las estructuras durante su vida útil podrán someterse a sollicitaciones eventuales significativas, tales como: sismos, impactos, asentamientos inesperados en los apoyos, entre otros. Debido a las sobrecargas a las que se sometería la estructura se generar daños localizados y bien significativos en los elementos de la estructura.

Evaluar o predecir los daños causados por las sobrecargas es un problema muy importante en el ámbito de la ingeniería estructural. Es por ello que en la Universidad de los Andes se ha creado un modelo que combina los conceptos de rotula plástica con la teoría del daño continuo. Es decir, los modelos de pórticos con plasticidad concentrada se modificaron para incluir los conceptos de la teoría de daño, dando como origen a la “*teoría del daño concentrado*”.

Teoría del daño concentrado para cargas monotónicas.

Para modelar el problema se utiliza el modelo de disipación concentrada, el cual representa cada miembro de la estructura como el ensamblaje de una viga-columna elástica y dos rótulas inelásticas ubicadas en los extremos de la viga-columna, ver figura 1.16.

El modelo admite que la disipación de energía, daños y plasticidad, se concentran en las rótulas mientras que el tramo central de la viga-columna permanece elástico (lineal o no).

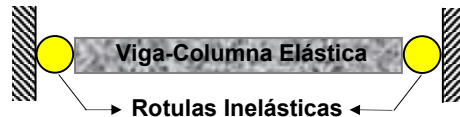


Figura 1.16 Modelo de inelasticidad concentrada.

Siguiendo el mismo esquema teórico, las deformaciones generalizadas totales $\{\phi\}$ del miembro aportricado inelástico están definidas por la suma de las deformaciones de la viga-columna elástica $\{\phi^{vc}\}$ más las deformaciones generalizadas plásticas $\{\phi^p\}$ (debido a la fluencia del acero), más las deformaciones generalizadas debidas al daño $\{\phi^d\}$ (por el agrietamiento del concreto o pérdida de rigidez y pérdida de resistencia), resultando:

$$\{\phi\} = \{\phi^{vc}\} + \{\phi^p\} + \{\phi^d\} = [F]\{M\} + \{\phi^p\} + \{\phi^d\} \quad (1.43)$$

Para obtener la ley de estado de un elemento elastoplástico degradable es necesario definir como se obtiene las deformaciones generalizadas debido al daño $\{\phi^d\}$.

Según la teoría de daño continuo para modelar el proceso de degradación mecánica del material y su comportamiento resultante, se introduce una variable (daño) que toma valores entre cero y uno. El daño en ese caso mide la densidad relativa de los microdefectos en el material. Tomando este concepto, en el modelo de pórticos elastoplástico degradable, se consideran variables de daño a el conjunto de variables $\{D\}^t = \{d_i, d_j, d_n\}$, las cuales representan el daño por flexión en la rótula i y en la rótula j y el daño axial del miembro respectivamente.

Flórez-López [2], postula que las deformaciones debido al daño son:

$$\{\phi^d\} = [C_{(D)}]\{M\} \quad (1.44)$$

Donde:

$[C_{(D)}]$ es la matriz diagonal de flexibilidad de las rotulas inelásticas.

$\{M\}$ son los esfuerzos generalizados del miembro.

$$[C_{(D)}] = \begin{bmatrix} \frac{d_i}{1-d_i} F_{11}^o & 0. & 0. \\ 0. & \frac{d_j}{1-d_j} F_{22}^o & 0. \\ 0. & 0. & \frac{d_n}{1-d_n} F_{33}^o \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Sustituyendo la expresión (1.44) en (1.43) se tiene:

$$\{\phi\} = [F^0]\{M\} + \{\phi^p\} + [C_{(D)}]\{M\} \Leftrightarrow \{\phi\} - \{\phi^p\} = [[F] + [C_{(D)}]]\{M\} \quad (1.46)$$

Definiendo $[F_{(D)}] = [F^0] + [C_{(D)}]$ como la matriz de flexibilidad de un miembro elastoplástico degradable y a su inversa como la matriz de rigidez del mismo ($[S_{(D)}] = [F_{(D)}]^{-1}$), se consigue la siguiente ley de estado para el miembro:

$$\{\phi\} - \{\phi^p\} = [F_{(D)}]\{M\} \Leftrightarrow \{M\} = [S_{(D)}]\{\phi - \phi^p\} \quad (1.47)$$

En el caso de pequeñas deformaciones y para un miembro de sección transversal constante A, Inercia I, modulo de elasticidad E y longitud L, la matriz de flexibilidad $[F_{(D)}]$ y de rigidez $[S_{(D)}]$ se escriben como:

$$[F_{(D)}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI(1-d_i)} & -\frac{1}{6EI} & 0. \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI(1-d_j)} & 0. \\ 0. & 0. & \frac{L}{EA(1-d_n)} \end{bmatrix} \quad (1.48a)$$

$$[S_{(D)}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-d_i)(4-d_j)}{4-d_i d_j} \frac{4EI}{L} & \frac{4(1-d_i)(1-d_j)}{4-d_i d_j} \frac{2EI}{L} & 0. \\ \frac{4(1-d_i)(1-d_j)}{4-d_i d_j} \frac{2EI}{L} & \frac{(1-d_j)(4-d_i)}{4-d_i d_j} \frac{4EI}{L} & 0. \\ 0. & 0. & (1-d_n) \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad (1.48b)$$

Por otro lado, se demuestra que las deformaciones generalizadas $\{\phi - \phi^p\}$ y los esfuerzos generalizados $\{M\}$ pueden deducirse tomando como base la energía complementaria U^* del miembro y la energía de deformación U del miembro.

La energía complementaria de un miembro elastoplástico degradable (U^*) se expresa como la suma de la energía complementaria de la viga-columna elástica (U_{vc}^*) más la energía complementaria de las rótulas inelásticas (U_r^*).

Si se consideran pequeñas deformaciones, la energía de deformación del miembro (U) debido al aporte de la viga-columna elástica más el aporte de las rótulas inelásticas, se puede formular como se indica en la expresión 1.49c.

$$U^* = U_{vc}^* + U_r^* = \frac{1}{2} \{M\}^t [F] \{M\} + \frac{1}{2} \{M\}^t [C_{(D)}] \{M\} \quad (1.49 a)$$

$$U^* = \frac{1}{2} \{M\}^t [F_{(D)}] \{M\} \quad (1.49 b)$$

$$U = \frac{1}{2} \{\phi - \phi^p\}^t [S_{(D)}] \{\phi - \phi^p\} \quad (1.49 c)$$

Según la teoría clásica de la mecánica de la fractura y el daño continuo, las fuerzas que producen daño $\{G\}$ pueden interpretarse como las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables internas daño $\{D\}$. Estas fuerzas se definen como la derivada de la energía de deformación complementaria con respecto al daño:

$$\{G\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial D} \right\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial d_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial d_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial d_n} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_{11}^o}{2} \left(\frac{m_i}{(1-d_i)} \right)^2 \\ \frac{F_{22}^o}{2} \left(\frac{m_j}{(1-d_j)} \right)^2 \\ \frac{F_{33}^o}{2} \left(\frac{N}{(1-d_n)} \right)^2 \end{array} \right\} \quad (1.50)$$

Al ingresar las nuevas variables internas tales como el daño $\{D\}$ y las deformaciones plásticas $\{\phi^p\}$, se debe introducir nuevas ecuaciones denominadas *leyes de evolución de las variables internas*, logrando con estas leyes y la ecuación (1.47) definir por completo la ley de comportamiento.

Las leyes de evolución se expresaran con ayuda de las funciones de fluencia (f) y de daño (g) para cada rótula inelástica. Dichas funciones dependen de las tasas de disipación ($\{M\}$ y $\{G\}$) y las variables internas ($\{d\phi^p\}$ y $\{dD\}$).

Las funciones de fluencia se obtienen en base a la hipótesis de equivalencia en deformaciones, la cual consiste en admitir que el comportamiento del material dañado es igual al de un material intacto siempre y cuando se sustituya el esfuerzo por el esfuerzo efectivo [2]. En elementos de concreto armado de sección transversal constante sometidos a flexión y despreciando los efectos axiales, se proponen las funciones de fluencia (f) y daño (g) siguientes:

$$\begin{aligned} f &= |M - X| - R \\ g &= G - \left(G_{cr} + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \right) \end{aligned} \quad (1.51)$$

En donde la función de fluencia presenta términos de endurecimiento cinemático (X) e isotrópo (R). Estos términos de endurecimiento serán función de las características del elemento y de las variables internas (daño y deformaciones plásticas). De una manera empírica se puede expresar los términos de endurecimiento X y R de la siguiente forma:

$$X = c\phi^p(1-d) \quad ; \quad R = M_y(1-d) \quad (1.52)$$

Donde “c” y “M_y” son constantes que caracterizan al miembro.

En las funciones del daño, el termino G representa la fuerza termodinámica asociada al daño, “G_{cr}” y “q” son constantes que caracterizan al miembro.

Razonando los límites de la plasticidad, es decir las funciones de fluencia, se tienen las siguientes leyes de evolución para las deformaciones plásticas en cada rótula:

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{l} \text{Plasticidad Inactiva} \quad d\phi_i^p = 0 \quad \text{si} \quad f_i < 0 \quad \text{ó} \quad df_i < 0 \\ \text{Plasticidad Activa} \quad d\phi_i^p \neq 0 \quad \text{si} \quad f_i = 0 \quad \text{y} \quad df_i = 0 \end{array} \right. \quad (1.53)$$

$$\text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{l} \text{Plasticidad Inactiva} \quad d\phi_j^p = 0 \quad \text{si} \quad f_j < 0 \quad \text{ó} \quad df_j < 0 \\ \text{Plasticidad Activa} \quad d\phi_j^p \neq 0 \quad \text{si} \quad f_j = 0 \quad \text{y} \quad df_j = 0 \end{array} \right.$$

La propagación del daño (aumento en los valores del daño) se garantiza, usando el criterio de Griffith, cuando la tasa de disipación de energía (G) se hace igual a el valor crítico ($G_{cr} + (q/(1-d)) \cdot \ln(1-d)$) denominado “la resistencia del agrietamiento”. Las leyes de Evolución del daño en cada rotula se escriben como:

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay daño cuando} \quad d\phi_i^p = 0 \quad \text{si} \quad f_i < 0 \quad \text{ó} \quad df_i < 0 \\ \text{Existe daño cuando} \quad d\phi_i^p \neq 0 \quad \text{si} \quad f_i = 0 \quad \text{y} \quad df_i = 0 \end{array} \right. \quad (1.54)$$

$$\text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay daño cuando} \quad d\phi_j^p = 0 \quad \text{si} \quad f_j < 0 \quad \text{ó} \quad df_j < 0 \\ \text{Existe daño cuando} \quad d\phi_j^p \neq 0 \quad \text{si} \quad f_j = 0 \quad \text{y} \quad df_j = 0 \end{array} \right.$$

Obtención de los parámetros del modelo simplificado de daño.

Los parámetros “c”, “My”, “ G_{cr} ” y “q” no tienen una interpretación física, sin embargo pueden ser calculados mediante la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales para condiciones límites. Estos parámetros son función de las propiedades del miembro, tales como el momento de agrietamiento, M_{cr} , el momento plástico, M_p , el momento último, M_u , y la deformación plástica última, ϕ_u^p . En el caso de cargas monotónicas el sistema a resolver es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } M = M_{cr} \Rightarrow d = 0. \quad \text{y} \quad g = 0. \quad (a) \\ \text{Si } M = M_p \Rightarrow \phi^p = 0 \quad , \quad g = 0. \quad \text{y} \quad f = 0. \quad (b) \\ \text{Si } M = M_u \Rightarrow dM = 0 \quad \text{y} \quad g = 0. \quad (c) \\ \text{Si } M = M_u \Rightarrow \phi^p = \phi_u^p \quad , \quad g = 0. \quad \text{y} \quad f = 0. \quad (d) \end{array} \right. \quad (1.55)$$

Constante “ G_{cr} ” del modelo de daño simplificado.

Para determinar G_{cr} , se usa la función de daño “g” y la condición de borde dada en 1.55(a), la cual indica que el miembro todavía no se ha dañado pero inicia el proceso de daño, $d = 0$ y $g = 0$.

$$g = 0. = G - G_{cr} - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \Rightarrow G = G_{cr}, \text{ según la expresión (2.50)} \quad G = \frac{F^0 M^2}{2(1-d)^2}$$

Sustituyendo $M = M_{cr}$ y $d = 0$ se obtiene el siguiente valor de G_{cr} :

$$G_{cr} = \frac{F^0 M_{cr}^2}{2} \quad (1.56)$$

Constante “q” del modelo de daño simplificado.

El parámetro q se consigue mediante la condición de borde dada en 1.55(c), la cual indica que existe un valor de daño igual al daño último ($d = d_u$) la función de daño “ g ” es cero ($g = 0$). Se despeja el valor de la tasa de disipación de energía, G , quedando:

$$g = G - G_{cr} - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} = 0 \Rightarrow G = G_{cr} + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} = \frac{F^0 M^2}{2(1-d)^2} \quad (1.57)$$

Subsiguientemente se derivara implícitamente respecto al daño la expresión obtenida para “ G ”, y se sustituye $dM = 0$, quedando:

$$\frac{2MF^0 dM}{2} = -2G_{cr}(1-d) - q[\ln(1-d)] + q = 0 \quad (1.58)$$

Aplicando las condiciones de borde $M = M_u$ y $d = d_u$, en las expresiones (1.57) y (1.58) finalmente se plantea un sistema de ecuaciones para obtener el valor del daño último (d_u) y el parámetro “ q ”, dicho sistema se formula en (1.59):

$$\begin{cases} -2G_{cr}(1-d_u) - q[\ln(1-d_u) + 1] = 0 \\ G_{cr} + q \frac{\ln(1-d_u)}{(1-d_u)} = \frac{F^0 M_u^2}{2(1-d_u)^2} \end{cases} \quad (1.59)$$

Constante “ M_y ” del modelo de daño simplificado.

Debido a que existe daño en el miembro, se sigue cumpliendo que $g = 0$; ahora si se considera el instante donde comienza la plasticidad ($f = 0$) y se sustituye $M = M_p$, $\phi^p = 0$, $d = d_p$ en las ecuaciones (1.51), resulta un sistema de ecuaciones no lineal, dicho sistema se obtiene usando la condición de borde (1.55b) como se muestra continuación:

$$\begin{aligned}
g &= G - G_{cr} - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} = 0. \\
f &= M - (1-d)c\phi^p - (1-d)M_y = 0 \\
\text{si } \phi^p &= 0, d = d_p \text{ y } M = M_p \Rightarrow \\
M_y &= \frac{M_p}{(1-d_p)}
\end{aligned} \tag{1.60 a}$$

$$G = \frac{F^0 M_p^2}{2(1-d_p)^2} = G_{cr} + q \frac{\ln(1-d_p)}{(1-d_p)} \tag{1.60 b}$$

Al resolver el sistema definido por (1.60 a) y (1.60 b), se obtendrán los valores del parámetro “ M_y ” y del daño “ d_p ”.

Constante “c” del modelo de daño simplificado.

El parámetro “c” se obtiene haciendo cumplir la condición de borde 1.55 (d), en la cual existe deformación plástica y daño último. De la expresión (1.51) se despeja el valor de “c” haciendo cumplir la plasticidad $f = 0$, luego se sustituye $M = M_u$, $\phi^p = \phi_u^p$, resultando:

$$\begin{aligned}
f &= M - (1-d)c\phi^p - (1-d)M_y = 0. \\
c &= \frac{\frac{M_u}{(1-d_u)} - M_y}{\phi_u^p}
\end{aligned} \tag{1.61}$$

La teoría del daño simplificado permite obtener resultados satisfactorios en simulaciones de pórticos planos bajo solicitaciones monotónicas. Sin embargo, una estructura en su vida útil podrá estar sometida a cargas cíclicas, razón por la cual no es conviene usar el modelo simplificado. Debido a que dicho modelo no puede representar el comportamiento histerético del daño ni la fatiga de bajo ciclaje. Razón por la cual se debe modificar el modelo simplificado para lograr representar tales efectos. La fatiga de bajo ciclaje es debida a que el incremento del daño puede ocurrir durante fases de carga aún cuando el valor del desplazamiento máximo se haya alcanzado en el primer ciclo de carga. A continuación se define en un modelo de daño concentrado que solventa las limitaciones del modelo simplificado.

MODELO HISTERÉTICO ELASTOPLÁSTICO DEGRADABLE CON FATIGA DE BAJO CICLAJE.

Basándose en el modelo de daño concentrado, se plantea un nuevo modelo, en el cual se incorporan los efectos histerético del daño y la fatiga de bajo ciclaje. Este nuevo modelo es denominado Modelo Histerético de Daño con Fatiga de Bajo Ciclaje (MDC).

En el caso histerético de daño se consideran secciones asimétricas de concreto armado (cantidades diferentes de acero superior e inferior), razón por la que existirán propiedades positivas y negativas. Para considerar el efecto variable del daño, se admiten tanto las variables de daño por flexión debido a las acciones positivas ($\{D^+\} = \{d_i^+, d_j^+\}$) como las debido a las acciones negativas ($\{D^-\} = \{d_i^-, d_j^-\}$), ver figura 1.17.

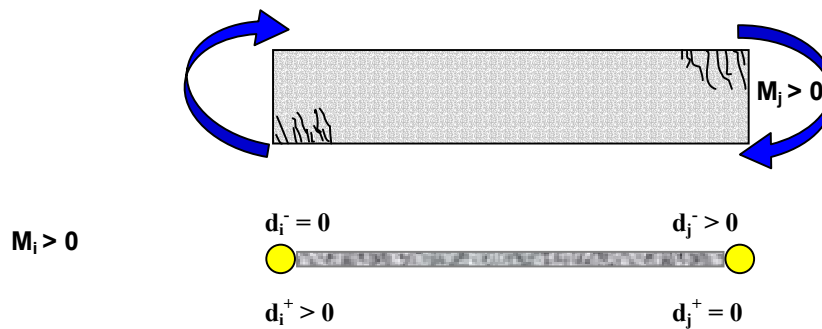


Figura 1.17 Representación del estado de daño de un miembro de concreto armado, bajo las acciones positivas a flexión.

Si un parámetro de daño por flexión toma un valor de cero, entonces el modelo representa en los extremos una unión rígida (no hay deterioro del material). Si toma un valor de uno, el modelo representa en los extremos el comportamiento de una articulación interna en el pórtico elástico.

La evolución del daño por flexión debido a acciones positivas, no tienen ninguna influencia sobre el comportamiento del miembro bajo acciones negativas. En miembros de concreto armado este tipo de comportamiento puede justificarse como consecuencia del cierre de grietas cuando la carga cambia de signo.

Ley de comportamiento para el modelo histerético elastoplástico degradable con fatiga de bajo ciclaje.

Para definir la ley de comportamiento en este caso, es necesario modificar la ley de estado, los términos de endurecimiento, las funciones de fluencia así como las leyes de evolución del daño del modelo de daño concentrado, definido anteriormente.

Considerando la posibilidad de cargas reversibles (positivas y negativas), la energía de deformación complementaria de un miembro elastoplástico degradable puede expresarse:

$$U^* = \frac{1}{2} \{M^+\}^t [F^0] \{M^+\} + \frac{1}{2} \{M^+\}^t [C_{(D^+)}] \{M^+\} + \frac{1}{2} \{M^-\}^t [F^0] \{M^-\} + \frac{1}{2} \{M^-\}^t [C_{(D^-)}] \{M^-\} \quad (1.62)$$

$$U^* = \frac{1}{2} \{M^+\}^t [F_{(D^+)}] \{M^+\} + \frac{1}{2} \{M^-\}^t [F_{(D^-)}] \{M^-\}$$

$$\langle M^+ \rangle = \begin{cases} M & \text{si } M \geq 0 \\ 0 & \text{si } M < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \langle M^- \rangle = \begin{cases} M & \text{si } M < 0 \\ 0 & \text{si } M \geq 0 \end{cases}$$

$$\{M\} = \left[\frac{\partial U}{\partial \phi} \right] \quad (1.63)$$

donde:

$[F_{(D^+)}] = [F^0] + [C_{(D^+)}]$ define la matriz de flexibilidad de un miembro dañado bajo las acciones positivas,

$[F_{(D^-)}] = [F^0] + [C_{(D^-)}]$ es la matriz de flexibilidad de un miembro dañado bajo las acciones negativas,

$\{M^+\}$ define el vector de esfuerzos generalizados debido a las acciones positivas, y

$\{M^-\}$ define el vector de esfuerzos generalizados debido a las acciones negativas.

Ley de estado del modelo histerético degradable.

Al derivar la energía de deformación complementaria de un miembro histerético degradable (expresión (1.62)) respecto a los esfuerzos generalizados, se obtiene la *ley de estado del modelo histerético*, como se expresa en (1.64):

$$\{\phi\} - \{\phi^p\} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial M} \right\} = [F_{(D^+)}] \{M^+\} + [F_{(D^-)}] \{M^-\} \quad (1.64)$$

Fuerzas termodinámicas asociadas al daño.

En el modelo histerético para pórticos planos, se establece que para cada término de daño ($d_i^+, d_i^-, d_j^+, d_j^-$) existe una fuerza termodinámica asociada al mismo, lo que permite decir que se tiene un total de cuatro fuerzas termodinámicas asociadas al daño ($G_i^+, G_i^-, G_j^+, G_j^-$). Dichas fuerzas representan la tasa de disipación de la energía de deformación complementaria del miembro respecto al daño. A continuación se formulan dichas fuerzas:

$$\{G^+\} = -\left\{\frac{\partial U^*}{\partial D^+}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U^*}{\partial d_i^+} \\ \frac{\partial U^*}{\partial d_j^+} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} G_i^+ \\ G_j^+ \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \frac{F_{11}^o}{2} \left(\frac{m_i^+}{1-d_i^+}\right)^2 \\ \frac{F_{22}^o}{2} \left(\frac{m_j^+}{1-d_j^+}\right)^2 \end{array}\right\}$$

(1.65)

$$\{G^-\} = -\left\{\frac{\partial U^*}{\partial D^-}\right\} = -\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U^*}{\partial d_i^-} \\ \frac{\partial U^*}{\partial d_j^-} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} G_i^- \\ G_j^- \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \frac{F_{11}^o}{2} \left(\frac{m_i^-}{1-d_i^-}\right)^2 \\ \frac{F_{22}^o}{2} \left(\frac{m_j^-}{1-d_j^-}\right)^2 \end{array}\right\}$$

En nuevo modelo de daño, que se describe (MDC), se deben cumplir las siguientes condiciones de admisibilidad de acuerdo a los principios de la termodinámica:

$$\begin{aligned} (m_i - X_i)d\phi_i^p &\geq 0 & dd_i^+ &> 0 & dd_j^+ &> 0 \\ (m_j - X_j)d\phi_j^p &\geq 0 & dd_i^- &> 0 & dd_j^- &> 0 \end{aligned}$$

(1.66)

Leyes de evolución de las variables internas.

En el nuevo modelo, MDC, las variables internas siguen siendo las deformaciones plásticas y las deformaciones debido al daño, como en el modelo del daño descrito anteriormente.

Leyes de evolución de la plasticidad.

Las leyes de evolución de la plasticidad en modelo MDC son similares a las empleadas en el modelo de daño concentrado monotónico. Sólo existe discrepancia en las funciones de fluencia, ya que en ellas se modifican los términos de endurecimiento (X, R) para tomar en cuenta el comportamiento histerético. Ahora la función de fluencia de las rótulas i y j del miembro tienen dos expresiones, una para las acciones positivas y otra para las acciones negativas.

Las funciones de plasticidad en cada articulación son:

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{l} f_i^+ = \frac{m_i^+}{(1-d_i^+)} - X_i^+ - R_i^+ \\ f_i^- = \frac{m_i^-}{(1-d_i^-)} - X_i^- - R_i^- \end{array} \right. \quad \text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{l} f_j^+ = \frac{m_j^+}{(1-d_j^+)} - X_j^+ - R_j^+ \\ f_j^- = \frac{m_j^-}{(1-d_j^-)} - X_j^- - R_j^- \end{array} \right. \quad (1.67)$$

Donde:

X_i^+ , X_i^- , X_j^+ , X_j^- son los términos de endurecimiento cinemático en la rotula i y j, bajo las acciones positivas y negativas, respectivamente.

R_i^+ , R_i^- , R_j^+ , R_j^- son los términos de endurecimiento isótropo en la rotula i y j, bajo las acciones positivas y negativas, respectivamente.

Las funciones de “X” y “R”, positivo y negativo en cada rótula del elemento, se escriben como:

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{l} X_i^+ = \alpha_i^+ c_i^+ \phi_i^p \\ X_i^- = \alpha_i^- c_i^- \phi_i^p \end{array} \right. \quad \text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{l} X_j^+ = \alpha_j^+ c_j^+ \phi_j^p \\ X_j^- = \alpha_j^- c_j^- \phi_j^p \end{array} \right. \quad (1.68)$$

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{l} R_i^+ = \beta_i^+ c_i^+ p_i + M_{y_i}^+ \\ R_i^- = \beta_i^- c_i^- p_i + M_{y_i}^- \end{array} \right. \quad \text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{l} R_j^+ = \beta_j^+ c_j^+ \phi_j^p + M_{y_j}^+ \\ R_j^- = \beta_j^- c_j^- \phi_j^p + M_{y_j}^- \end{array} \right. \quad (1.69)$$

Donde:

“ α ”, “ c ”, “ β ” y “ M_y ” son constantes que caracterizan al miembro en ese instante, y corresponden a los nudos “i” y “j” del miembro bajo el signo de las acciones (positivo o negativo), y

“ p ” define la máxima deformación plástica alcanzada en cada rótula, se considera como un valor absoluto.

Los términos “ α ” y “ β ” son siempre valores positivos en el intervalo comprendido entre cero y uno (0,1) y se relacionan mediante la siguiente expresión: $\alpha + \beta = 1$. Dichos términos (α y β) pueden ser interpretados como el porcentaje de la contribución del endurecimiento cinemático e isotrópico, respectivamente, al endurecimiento que depende de las deformaciones plásticas del modelo MDC. Durante el análisis los valores “ α ” y “ β ” se consideran constantes. Se recomienda que en estructuras de concreto armado se tome valores de α entre 0.80 a 0.95.

Leyes de evolución del daño.

Las leyes de evolución del daño no son iguales a las del modelo anterior, ya que se deben modificar para tomar en cuenta la fatiga de bajo ciclaje. Sin embargo las nuevas leyes representan el caso monotónico, como un caso particular.

Las leyes de evolución del daño, en el modelo MDC, se definen como funciones de daño independientes tanto para las acciones positivas como las negativas en cada rótula, i y j.

Las leyes de evolución del daño bajo acciones positivas, se formulan como:

$$\text{Rotulá } \left\{ \begin{array}{ll} \dot{d}_i^+ = \left(\frac{\dot{G}_i^+}{R_i^+} \right) \frac{(G_i^+)^{z^+}}{\frac{\partial R_i^+}{\partial d_i^+}} & \text{si } G_i^+ \geq G_{cr} \\ \dot{d}_i^+ = 0. & \text{si } G_i^+ < G_{cr} \end{array} \right. \quad \text{Rotulá } j \left\{ \begin{array}{ll} \dot{d}_j^+ = \left(\frac{\dot{G}_j^+}{R_j^+} \right) \frac{(G_j^+)^{z^+}}{\frac{\partial R_j^+}{\partial d_j^+}} & \text{si } G_j^+ \geq G_{cr} \\ \dot{d}_j^+ = 0. & \text{si } G_j^+ < G_{cr} \end{array} \right. \quad (1.70)$$

Las leyes de evolución del daño bajo acciones negativas, se formulan como:

$$\text{Rotula } i \left\{ \begin{array}{ll} \dot{d}_i^- = \left(\frac{\dot{G}_i^-}{R_i^-} \right) \frac{(G_i^-)^{z^-}}{\frac{\partial R_i^-}{\partial d_i^-}} & \text{si } G_i^- \geq G_{cr} \\ \dot{d}_i^- = 0. & \text{si } G_i^- < G_{cr} \end{array} \right. \quad \text{Rotula } j \left\{ \begin{array}{ll} \dot{d}_j^- = \left(\frac{\dot{G}_j^-}{R_j^-} \right) \frac{(G_j^-)^{z^-}}{\frac{\partial R_j^-}{\partial d_j^-}} & \text{si } G_j^- \geq G_{cr} \\ \dot{d}_j^- = 0. & \text{si } G_j^- < G_{cr} \end{array} \right. \quad (1.71)$$

Donde:

- * Los términos “ G_i^+ ”, “ G_i^- ”, “ G_j^+ ”, “ G_j^- ” representan las fuerzas termodinámicas asociadas al daño positivo y negativo en las rotulas i y j respectivamente, definidas en la expresión (1.65).
- * Los términos “ R_i^+ ”, “ R_i^- ”, “ R_j^+ ”, “ R_j^- ” definen la resistencia al agrietamiento para la parte positiva y negativa en las rótulas i y j respectivamente, formuladas en (1.69).
- * Los parámetros “ z^+ ” y “ z^- ” controlan el incremento del daño por fatiga de bajo ciclaje en cada ciclo de carga. Estos parámetros son función del daño, mediante una relación cuadrática. El valor de “z” disminuye al aumentar el daño y varía entre el intervalo de cero a treinta ($0 \leq Z \leq 30$). Para obtener el valor del parámetro se evalúa la siguiente expresión:

$$z = a_0 d^2 + a_1 d + 30, \text{ donde: } a_0 = \frac{2.5 + 30(du - 1)}{du(du - 1)}, \quad a_1 = -(a_0 + 30)$$

En la cual, “d” representa el daño en instante considerado y “d_u” define el daño último.

* Los términos “G_{cr}” son el mismo parámetro definido en el modelo anterior, pero calculados para acciones positivas y negativas en cada rótula.

En las nuevas leyes de evolución del daño se considera que el incremento del daño puede ocurrir durante las fases de carga aún cuando el valor del desplazamiento máximo se halla alcanzado en el primer ciclo de carga, además se toma en cuenta que el incremento del daño es nulo durante las descargas elásticas.

El modelo de daño concentrado con fatiga de bajo ciclaje, queda finalmente definido mediante *las ecuaciones de cinemática* (1.21) o (1.24), dependiendo si existen grandes o pequeños desplazamientos, *las ecuaciones de equilibrio* (1.33) ó (1.35), análisis dinámico o estático, *la ley de estado* (1.64) las *leyes de evolución de plasticidad* (1.53) en las cuales se considera “f_i” y “f_j” como el mayor valor entre las función de fluencia dadas en (1.67), respectivamente; *las leyes de evolución del daño* (1.70) y (1.71).